第17講　微分法

1　$f(x)=2x^3-6x+1$ とし，曲線 $y=f(x)$ を C とする．

(1)　C 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式を求めよ．

(2)　(1)で求めた接線を y 軸方向に $+1$ 平行移動した直線を l とする．l が C に接するときの a の値を求めよ．

【Point Pickup】

$y=f(x)$ の接線の方程式

$y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(t,\ f(t))$ における接線 l について

l の傾きは「　　　」

l の方程式は

$y=f(x)$ と直線 l を「接する」状態にする

①　$y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(t,\ f(t))$ における接線の方程式 m を作り，
m と l を「　　　　　」する．

②　特に $f(x)$ が「　　関数」のとき，$f(x)$ と l の式を「　　　」させ，「　　　」とする．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1]　関数 $f(x)=x^3-3x^2-9x$ の極大値を M，極小値を m とする．

(1)　M，m の値を求めよ．

(2)　$m \leqq f(x) \leqq M$ が成り立つような x の値の範囲を求めよ．

[2]　関数 $f(x)=2x^3+9x^2-3x-7$ が $x=\alpha$ で極大値 M をとり，$x=\beta$ で極小値 m をとるとき，$\beta-\alpha$，および $M-m$ の値を求めよ．

【Point Pickup】

[1]　極値について

$y=f(x)$ が $x=\alpha$ の前後で

増加から減少に転じるとき，$f(\alpha)$ を「　　　　」

減少から増加に転じるとき，$f(\alpha)$ を「　　　　」という．

$f(x)$ の増減は $f'(x)$ の「　　　」による．

「　　」ならその範囲で増加　　「　　」ならその範囲で減少

「　」ならその範囲で増加でも減少でもない

よって，$f'(\alpha)=0$ のとき，$x=\alpha$ で極値をとる「　　　　　　　　」

[2]　3次関数 $f(x)$ が極値をとる x

2次方程式 $f'(x)=0$ の解 α，β が「　　　　　　　　　」であれば，

$f(\alpha)$，$f(\beta)$ が極値となる．

$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$，$\alpha-\beta$ に関する問題は，「　　　　　　　」が有効．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　一辺の長さが1の正方形ABCDを考える．点Pは，点B，Cを除いた辺BC上を動くとする．点Pを通り直線APと垂直な直線と辺CDとの交点をQとする．線分BPの長さをxとするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\angle \mathrm{BAP}=\theta$とするとき，$\angle \mathrm{CPQ}$を$\theta$を用いて表せ．

(2)　$\triangle \mathrm{CPQ}$の面積Sの最大値と，そのときのxの値を求めよ．

(3)　線分AQの長さLの最小値と，そのときのxの値を求めよ．

【Point Pickup】

最大値・最小値

・変域の「　　　」のy座標の値

・変域内の「　　　」

が最大・最小の候補となる．変域に注意．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

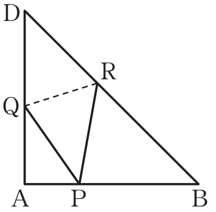
第 17 講　微分法

［1］　曲線 $y=x^3-5x^2+8x+11$ と直線 $y=mx+2$ が接するとき，$m=\boxed{\text{ア}}$ である.

［2］　$f(x)=x^3+ax^2+bx$ が $x=\alpha$ で極大値，$x=\beta$ で極小値をとる．このとき，

$$\alpha+\beta=-\frac{\boxed{\text{イ}}\,a}{\boxed{\text{ウ}}},\quad f(\alpha)+f(\beta)=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}a^3-\frac{2}{3}ab$$ である.

［3］　AB＝AD＝1，∠BAD＝90° の直角二等辺三角形 ABD を D が線分 AB 上の点 P にくるように折り，そのときにできる折り線を QR（Q は AD 上の点，R は BD 上の点）とする．DQ の長さを x とするとき，次の問いに答えよ．



⑴　△APQ の面積を S とするとき，

$$S^2=\frac{1}{4}\left(\boxed{\text{キ}}\,x^3-\boxed{\text{ク}}\,x^2+\boxed{\text{ケ}}\,x-1\right)$$ である.

⑵　S の最大値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ である.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第17講　微分法

[1] $f(x)=2x^3-6x+1$ とし，曲線 $y=f(x)$ を C とする．

(1) C 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式を求めよ．

(2) (1)で求めた接線を y 軸方向に $+1$ 平行移動した直線を l とする．l が C に接するときの a の値を求めよ．

(1) $C：f(x)=2x^3-6x+1$　　$f'(x)=6x^2-6$

よって $(a,\ f(a))$ における曲線 C の接線の方程式は　$y=f'(a)(x-a)+f(a)$ より

$y=(6a^2-6)(x-a)+2a^3-6a+1$　　よって　$\boldsymbol{y=(6a^2-6)x-4a^3+1}$

(2) (1)で求めた接線を y 軸方向に1平行移動した直線 l の方程式は

$y=(6a^2-6)x-4a^3+2$　……①

①が C と接するとき，接点の x 座標を b とするとその方程式は(1)より

$y=(6b^2-6)x-4b^3+1$　……②

①と②が一致するとき，係数を比較して

$6a^2-6=6b^2-6$　……③，　$-4a^3+2=-4b^3+1$　……④

③より　$a^2=b^2$　　$a\neq b$ より　$b=-a$

このとき④より　$-4a^3+2=4a^3+1$　　$a^3=\dfrac{1}{8}$　　a は実数より　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1]　関数 $f(x)=x^3-3x^2-9x$ の極大値を M，極小値を m とする．

(1)　M，m の値を求めよ．

(2)　$m \leqq f(x) \leqq M$ が成り立つような x の値の範囲を求めよ．

(1)　$f(x)=x^3-3x^2-9x$　より　$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

よって $f(x)$ の増減は右表

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	-27	↗

したがって　極大値 $\boldsymbol{M=5}$

極小値 $\boldsymbol{m=-27}$

(2)　$f(x)=M$ となる x は

$x^3-3x^2-9x=5$　より　$(x+1)^2(x-5)=0$

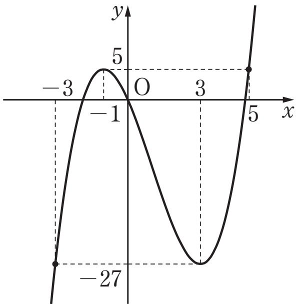
$x=-1,\ 5$

$f(x)=m$ となる x は

$x^3-3x^2-9x=-27$　より　$(x+3)(x-3)^2=0$

$x=-3,\ 3$

よって $y=f(x)$ のグラフは右図より，



$m \leqq f(x) \leqq M$ が成り立つ x の範囲は　$\boldsymbol{-3 \leqq x \leqq 5}$

2 [2]　関数 $f(x)=2x^3+9x^2-3x-7$ が $x=\alpha$ で極大値 M をとり，$x=\beta$ で極小値 m をとるとき，$\beta-\alpha$，および $M-m$ の値を求めよ．

$f(x)=2x^3+9x^2-3x-7$　より　$f'(x)=6x^2+18x-3=3(2x^2+6x-1)$

題意より $f'(x)=0$　つまり　$2x^2+6x-1=0$ の2解が α，β $(\alpha<\beta)$ である．

解と係数の関係より　$\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=-\dfrac{1}{2}$

$(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=(-3)^2-4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=11$　よって　$\beta-\alpha=\boldsymbol{\sqrt{11}}$ (>0)

また，$\alpha-\beta=-(\beta-\alpha)=-\sqrt{11}$

$M-m=f(\alpha)-f(\beta)$

$=2(\alpha^3-\beta^3)+9(\alpha^2-\beta^2)-3(\alpha-\beta)$

$=2\{(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)\}+9(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)-3(\alpha-\beta)$

$=2\left\{-11\sqrt{11}-\dfrac{3}{2}\cdot(-\sqrt{11})\right\}+9\cdot(-3)\cdot(-\sqrt{11})-3\cdot(-\sqrt{11})=\boldsymbol{11\sqrt{11}}$

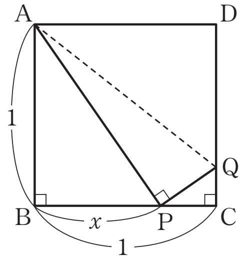
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　一辺の長さが１の正方形 ABCD を考える．点 P は，点 B，C を除いた辺 BC 上を動くとする．点 P を通り直線 AP と垂直な直線と辺 CD との交点を Q とする．線分 BP の長さを x とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\angle\mathrm{BAP}=\theta$ とするとき，$\angle\mathrm{CPQ}$ を θ を用いて表せ．

(2)　$\triangle\mathrm{CPQ}$ の面積 S の最大値と，そのときの x の値を求めよ．

(3)　線分 AQ の長さ L の最小値と，そのときの x の値を求めよ．



(1)　$\angle\mathrm{BAP}=\theta$ より　$\angle\mathrm{APB}=180^\circ-90^\circ-\angle\mathrm{BAP}=90^\circ-\theta$

よって　$\angle\mathrm{CPQ}=180^\circ-90^\circ-\angle\mathrm{APB}=90^\circ-(90^\circ-\theta)=\boldsymbol{\theta}$

(2)　(1)より $\angle\mathrm{BAP}=\angle\mathrm{CPQ}$　　よって $\triangle\mathrm{ABP}\backsim\triangle\mathrm{PCQ}$

$1:(1-x)=x:\mathrm{CQ}$　　$\mathrm{CQ}=x(1-x)$

したがって $S=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{CP}\cdot\mathrm{CQ}=\dfrac{1}{2}x(1-x)^2=\dfrac{1}{2}(x^3-2x^2+x)$

$S'=\dfrac{1}{2}(3x^2-4x+1)=\dfrac{1}{2}(x-1)(3x-1)$

$0<x<1$ における S の増減は右表．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
S'	／	$+$	0	$-$	／
S	／	↗	$\frac{2}{27}$	↘	／

よって　**$x=\dfrac{1}{3}$ のとき S の最大値は $\dfrac{2}{27}$**

(3)　$L^2=\mathrm{AP}^2+\mathrm{PQ}^2=(1+x^2)+\{(1-x)^2+x^2(1-x)^2\}=x^4-2x^3+3x^2-2x+2$

$(L^2)'=4x^3-6x^2+6x-2=2(2x-1)(x^2-x+1)$

$x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ より　L^2 の増減表は右表．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$(L^2)'$	／	$-$	0	$+$	／
L^2	／	↘	$\frac{25}{16}$	↗	／

よって　**$x=\dfrac{1}{2}$ のとき**　L^2 の最小値は　$\dfrac{25}{16}$

このとき L は**最小値 $\dfrac{5}{4}$** をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

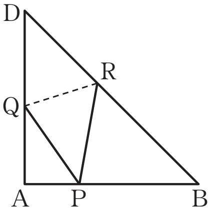
第 17 講　微分法

［1］　曲線 $y=x^3-5x^2+8x+11$ と直線 $y=mx+2$ が接するとき，$m=\boxed{\text{ア}}$ である.

［2］　$f(x)=x^3+ax^2+bx$ が $x=\alpha$ で極大値，$x=\beta$ で極小値をとる．このとき，

$$\alpha+\beta=-\frac{\boxed{\text{イ}}\,a}{\boxed{\text{ウ}}},\quad f(\alpha)+f(\beta)=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}a^3-\frac{2}{3}ab \text{ である.}$$

［3］　AB＝AD＝1，∠BAD＝90° の直角二等辺三角形 ABD を D が線分 AB 上の点 P にくるように折り，そのときにできる折り線を QR（Q は AD 上の点，R は BD 上の点）とする．DQ の長さを x とするとき，次の問いに答えよ.



(1)　△APQ の面積を S とするとき，

$$S^2=\frac{1}{4}\left(\boxed{\text{キ}}\,x^3-\boxed{\text{ク}}\,x^2+\boxed{\text{ケ}}\,x-1\right) \text{ である.}$$

(2)　S の最大値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ である.

解答例

［1］　$y=x^3-5x^2+8x+11$　……①　より　$y'=3x^2-10x+8$

①上の点 $(t,\ t^3-5t^2+8t+11)$ における接線の方程式は

$$y=(3t^2-10t+8)(x-t)+t^3-5t^2+8t+11=(3t^2-10t+8)x-2t^3+5t^2+11$$

これが $y=mx+2$ と一致するとき　$-2t^3+5t^2+11=2$　　$(t-3)(2t^2+t+3)=0$

$$2t^2+t+3=2\left(t^2+\frac{t}{2}\right)+3=2\left\{\left(t+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right\}+3=2\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{8}>0$$

t は実数より　$t=3$　　　　このとき　$m=3t^2-10t+8=3\cdot3^2-10\cdot3+8=\mathbf{5}$

［2］　$f'(x)=3x^2+2ax+b=0$ の 2 解が α，β より　$\alpha+\beta=-\dfrac{\mathbf{2}a}{\mathbf{3}}$，$\alpha\beta=\dfrac{b}{3}$

$$\begin{aligned}f(\alpha)+f(\beta)&=(\alpha^3+\beta^3)+a(\alpha^2+\beta^2)+b(\alpha+\beta)\\&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+a\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+b(\alpha+\beta)\\&=\left(-\frac{2a}{3}\right)^3-3\cdot\frac{b}{3}\cdot\left(-\frac{2a}{3}\right)+a\left\{\left(-\frac{2a}{3}\right)^2-2\cdot\frac{b}{3}\right\}+b\left(-\frac{2a}{3}\right)\\&=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{27}}a^3-\frac{2}{3}ab\end{aligned}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

[3] (1)　DQ＝QP＝x のとき，AQ＝$1-x$

$\mathrm{AP}=\sqrt{\mathrm{QP}^2-\mathrm{AQ}^2}=\sqrt{x^2-(1-x)^2}=\sqrt{2x-1}$

△APQ ができるような x の値の範囲は $x>0$ かつ $1-x>0$ かつ $2x-1>0$ より

$\dfrac{1}{2}<x<1$

よって　$S^2=\left\{\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}\right\}^2=\dfrac{1}{4}(2x-1)(1-x)^2=\dfrac{1}{4}(\mathbf{2}x^3-\mathbf{5}x^2+\mathbf{4}x-1)$

(2)　$f(x)=2x^3-5x^2+4x-1$ とおくと，

$f'(x)=6x^2-10x+4=2(x-1)(3x-2)$

$\dfrac{1}{2}<x<1$ における増減表は右図.

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$	(0)
$f(x)$	(0)	↗	極大	↘	(0)

よって $x=\dfrac{2}{3}$ のとき $f(x)$ は最大となり，

このとき S は最大値　$\dfrac{1}{2}\sqrt{f\left(\dfrac{2}{3}\right)}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{27}}=\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{18}}$　をとる.